Zadanie 35. Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 12, 13\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

Przypomnijmy najpierw definicję prawdopodobieństwa warunkowego. Przypuśćmy, że w przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω mamy dane dwa zdarzenia A i B. Prawdopodobieństwo warunkowe, że zajdzie zdarzenie A pod warunkiem, że zajdzie zdarzenie B, jest równe

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Przypuśćmy następnie, że tak jak w zadaniu 35, mamy do czynienia z klasyczną definicją prawdopodobieństwa. Wówczas

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} \quad \text{oraz} \quad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}.$$

Zatem

$$P(A \mid B) = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

W takim przypadku będziemy zatem korzystać ze wzoru:

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

W rozwiązaniu tego zadania i kilku podobnych będziemy korzystać z podstawowych reguł kombinatorycznych: reguły mnożenia i reguły dodawania. Będziemy także korzystać ze współczynników dwumianowych. Przypomnijmy zatem trzy wzory:

$$\binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{oraz} \quad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Po tym wstępie przejdziemy do rozwiązania zadania 35.

Rozwiązanie. Zdarzeniami elementarnymi są dwuelementowe podzbiory zbioru

$$X = \{1, 2, 3, \ldots, 12, 13\}.$$

Jeszcze raz zauważmy, że nie musimy obliczać liczby zdarzeń elementarnych. Teraz w zbiorze Ω zdarzeń elementarnych wyróżniamy dwa zdarzenia:

- zdarzenie A składa się z tych dwuelementowych podzbiorów Y zbioru X, do których należy liczba 8,
- zdarzenie B składa się z tych dwuelementowych podzbiorów Z zbioru X, których elementy dają w sumie liczbę nieparzystą.

Inaczej mówiąc:

- zdarzenie A składa się z tych dwuelementowych podzbiorów zbioru X postaci $\{8, x\}$, gdzie $x \in X$ oraz $x \neq 8$,
- zdarzenie B składa się z tych dwuelementowych podzbiorów $\{x, y\}$ zbioru X, dla których suma $x + y$ jest liczbą nieparzystą.

Musimy obliczyć $|A \cap B|$ oraz $|B|$. Zacznijmy od $|B|$. Jeśli suma dwóch liczb jest nieparzysta, to jedna z tych liczb jest parzysta, a druga nieparzysta. Liczbę parzystą ze zbioru X możemy wybrać na 6 sposobów (bo w zbiorze X jest 6 liczb parzystych: 2, 4, 6, 8, 10 i 12). Liczbę nieparzystą możemy wybrać na 7 sposobów (bo w zbiorze X jest 7 liczb nieparzystych: 1, 3, 5, 7, 9, 11 i 13). Mamy zatem $6 \cdot 7 = 42$ sposoby wybrania dwóch liczb, których suma jest liczbą nieparzystą. To znaczy, że $|B| = 42$.

Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy policzyć takie zbiory dwuelementowe postaci $\{8, x\}$ (gdzie $x \neq 8$), dla których liczba $8 + x$ jest nieparzysta. A więc liczba x ma być nieparzysta. Mamy 7 takich liczb w zbiorze X. Zatem $|A \cap B| = 7$. Stąd wynika, że

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{7}{42} = \frac{1}{6}.$$

To kończy rozwiązanie zadania.

W podobny sposób rozwiązujemy warianty zadania 35, różniące się od niego liczbą elementów zbioru, z którego losujemy pary liczb, liczbą, która ma się znajdować wśród wylosowanych liczb oraz parzystością sumy. Okaże się, zę otrzymane prawdopodobieństwa warunkowe mogą być różne. Rozwiążmy zatem takie zadania.

Zadanie 35a. Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 12, 13\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 7, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

Rozwiązanie. Zdarzeniami elementarnymi są dwuelementowe podzbiory zbioru

$$X = \{1, 2, 3, \ldots, 12, 13\}.$$

W zbiorze Ω zdarzeń elementarnych wyróżniamy dwa zdarzenia:

- zdarzenie A składa się z tych dwuelementowych podzbiorów Y zbioru X, do których należy liczba 7,
- zdarzenie B składa się z tych dwuelementowych podzbiorów Z zbioru X, których elementy dają w sumie liczbę nieparzystą.

Inaczej mówiąc:

- zdarzenie A składa się z tych dwuelementowych podzbiorów zbioru X postaci $\{7, x\}$, gdzie $x \in X$ oraz $x \neq 7$,
- zdarzenie B składa się z tych dwuelementowych podzbiorów $\{x, y\}$ zbioru X, dla których suma $x + y$ jest liczbą nieparzystą.

Musimy obliczyć $|A \cap B|$ oraz $|B|$. Dokładnie tak jak w zadaniu 35 mamy $|B| = 42$. Różnica będzie w liczbie elementów zbioru $|A \cap B|$. Musimy policzyć takie zbiory dwuelementowe postaci $\{7, x\}$ (gdzie $x \neq 7$), dla których liczba $7 + x$ jest nieparzysta.

A więc liczba x tym razem ma być parzysta. Mamy 6 takich liczb w zbiorze X. Zatem $|A \cap B| = 6$. Stąd wynika, że

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}.$$

To kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 35b. Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

Rozwiązanie. Zdarzeniami elementarnymi są dwuelementowe podzbiory zbioru

$$X = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}.$$

W zbiorze Ω zdarzeń elementarnych wyróżniamy dwa zdarzenia:

- zdarzenie A składa się z tych dwuelementowych podzbiorów Y zbioru X, do których należy liczba 8,
- zdarzenie B składa się z tych dwuelementowych podzbiorów Z zbioru X, których elementy dają w sumie liczbę nieparzystą.

Inaczej mówiąc:

- zdarzenie A składa się z tych dwuelementowych podzbiorów zbioru X postaci $\{8, x\}$, gdzie $x \in X$ oraz $x \neq 8$,
- zdarzenie B składa się z tych dwuelementowych podzbiorów $\{x, y\}$ zbioru X, dla których suma $x + y$ jest liczbą nieparzystą.

Musimy obliczyć $|A \cap B|$ oraz $|B|$. Tym razem $|B| = 36$. Mianowicie suma dwóch liczb jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z nich jest parzysta i druga jest nieparzysta. Liczbę parzystą możemy wybrać ze zbioru X na 6 sposobów, liczbę nieparzystą także na 6 sposobów. Z reguły mnożenia wynika więc, że $|B| = 6 \cdot 6 = 36$.

Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy policzyć takie zbiory dwuelementowe postaci $\{8, x\}$ (gdzie $x \neq 8$), dla których liczba $8 + x$ jest nieparzysta. A więc liczba x ma być nieparzysta. Mamy 6 takich liczb w zbiorze X. Zatem $|A \cap B| = 6$. Stąd wynika, że

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

To kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 35c. Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 7, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

Rozwiązanie. Zdarzeniami elementarnymi są dwuelementowe podzbiory zbioru

$$X = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}.$$

W zbiorze Ω zdarzeń elementarnych wyróżniamy dwa zdarzenia:

- zdarzenie A składa się z tych dwuelementowych podzbiorów Y zbioru X, do których należy liczba 7,
- zdarzenie B składa się z tych dwuelementowych podzbiorów Z zbioru X, których elementy dają w sumie liczbę nieparzystą.

Inaczej mówiąc:

- zdarzenie A składa się z tych dwuelementowych podzbiorów zbioru X postaci $\{7, x\}$, gdzie $x \in X$ oraz $x \neq 7$,
- zdarzenie B składa się z tych dwuelementowych podzbiorów $\{x, y\}$ zbioru X, dla których suma $x + y$ jest liczbą nieparzystą.

Musimy obliczyć $|A \cap B|$ oraz $|B|$. Tak jak w zadaniu 35b otrzymujemy $|B| = 36$. Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy policzyć takie zbiory dwuelementowe postaci $\{7, x\}$ (gdzie $x \neq 7$), dla których liczba $7 + x$ jest nieparzysta. A więc liczba x ma być parzysta. Mamy 6 takich liczb w zbiorze X. Zatem $|A \cap B| = 6$. Stąd wynika, że

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

To kończy rozwiązanie zadania.

W czterech następnych zadaniach będziemy mieli do czynienia z sumą parzystą.

Zadanie 35d. Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 12, 13\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie parzysta.

Rozwiązanie. Zdarzeniami elementarnymi są dwuelementowe podzbiory zbioru

$$X = \{1, 2, 3, \ldots, 12, 13\}.$$

W zbiorze Ω zdarzeń elementarnych wyróżniamy dwa zdarzenia:

- zdarzenie A składa się z tych dwuelementowych podzbiorów Y zbioru X, do których należy liczba 8,
- zdarzenie B składa się z tych dwuelementowych podzbiorów Z zbioru X, których elementy dają w sumie liczbę parzystą.

Inaczej mówiąc:

- zdarzenie A składa się z tych dwuelementowych podzbiorów zbioru X postaci $\{8, x\}$, gdzie $x \in X$ oraz $x \neq 8$,
- zdarzenie B składa się z tych dwuelementowych podzbiorów $\{x, y\}$ zbioru X, dla których suma $x + y$ jest liczbą parzystą.

Musimy obliczyć $|A \cap B|$ oraz $|B|$. Zacznijmy od $|B|$. Jeśli suma dwóch liczb jest parzysta, to albo obie liczby są parzyste, albo obie są nieparzyste. Dwie liczby parzyste ze zbioru X możemy wybrać na $\binom{6}{2}$ sposobów (bo w zbiorze X jest 6 liczb parzystych: 2, 4, 6, 8, 10 i 12). Dwie liczby nieparzyste możemy wybrać na $\binom{7}{2}$ sposobów (bo w zbiorze X jest 7 liczb nieparzystych: 1, 3, 5, 7, 9, 11 i 13). Mamy zatem

$$|B| = \binom{6}{2} + \binom{7}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} + \frac{7 \cdot 6}{2} = 15 + 21 = 36.$$

Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy policzyć takie zbiory dwuelementowe postaci $\{8, x\}$ (gdzie $x \neq 8$), dla których liczba $8 + x$ jest parzysta. A więc liczba x ma być parzysta. Mamy 5 takich liczb w zbiorze X (bowiem w zbiorze X znajduje się 6 liczb parzystych, a więc 5 liczb parzystych różnych od 8). Zatem $|A \cap B| = 5$. Stąd wynika, że

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{5}{36}.$$

To kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 35e. Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 12, 13\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 7, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie parzysta.

Rozwiązanie. Zdarzeniami elementarnymi są dwuelementowe podzbiory zbioru

$$X = \{1, 2, 3, \ldots, 12, 13\}.$$

W zbiorze Ω zdarzeń elementarnych wyróżniamy dwa zdarzenia:

- zdarzenie A składa się z tych dwuelementowych podzbiorów Y zbioru X, do których należy liczba 7,
- zdarzenie B składa się z tych dwuelementowych podzbiorów Z zbioru X, których elementy dają w sumie liczbę parzystą.

Inaczej mówiąc:

- zdarzenie A składa się z tych dwuelementowych podzbiorów zbioru X postaci $\{7, x\}$, gdzie $x \in X$ oraz $x \neq 7$,
- zdarzenie B składa się z tych dwuelementowych podzbiorów $\{x, y\}$ zbioru X, dla których suma $x + y$ jest liczbą parzystą.

Musimy obliczyć $|A \cap B|$ oraz $|B|$. Dokładnie tak jak w zadaniu 35d mamy $|B| = 36$. Następnie obliczamy $|A \cap B|$. Musimy policzyć takie zbiory dwuelementowe postaci $\{7, x\}$ (gdzie $x \neq 7$), dla których liczba $7 + x$ jest parzysta. A więc liczba x ma być nieparzysta. Mamy 6 takich liczb w zbiorze X (bowiem w zbiorze X znajduje się 7 liczb nieparzystych, a więc 6 liczb nieparzystych różnych od 7). Zatem $|A \cap B| = 6$. Stąd wynika, że

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

To kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 35f. Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie parzysta.

Rozwiązanie. Zdarzeniami elementarnymi są dwuelementowe podzbiory zbioru

$$X = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}.$$

W zbiorze Ω zdarzeń elementarnych wyróżniamy dwa zdarzenia:

- zdarzenie A składa się z tych dwuelementowych podzbiorów Y zbioru X, do których należy liczba 8,
- zdarzenie B składa się z tych dwuelementowych podzbiorów Z zbioru X, których elementy dają w sumie liczbę parzystą.

Inaczej mówiąc:

- zdarzenie A składa się z tych dwuelementowych podzbiorów zbioru X postaci $\{8, x\}$, gdzie $x \in X$ oraz $x \neq 8$,
- zdarzenie B składa się z tych dwuelementowych podzbiorów $\{x, y\}$ zbioru X, dla których suma $x + y$ jest liczbą parzystą.

Musimy obliczyć $|A \cap B|$ oraz $|B|$. Tym razem $|B| = 30$. Mianowicie suma dwóch liczb jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy obie są parzyste lub obie nieparzyste. Dwie liczby parzyste możemy wybrać ze zbioru X na $\binom{6}{2}$ sposobów, dwie liczby nieparzyste także na $\binom{6}{2}$ sposobów. Zatem

$$|B| = 2 \cdot \binom{6}{2} = 2 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 30.$$

Następnie obliczamy $|A \cap B|$. Musimy policzyć takie zbiory dwuelementowe postaci $\{8, x\}$ (gdzie $x \neq 8$), dla których liczba $8 + x$ jest parzysta. A więc liczba x ma być parzysta. Mamy 5 takich liczb w zbiorze X. Zatem $|A \cap B| = 5$. Stąd wynika, że

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

To kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 35g. Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 7, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

Rozwiązanie. Zdarzeniami elementarnymi są dwuelementowe podzbiory zbioru

$$X = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}.$$

W zbiorze Ω zdarzeń elementarnych wyróżniamy dwa zdarzenia:

- zdarzenie A składa się z tych dwuelementowych podzbiorów Y zbioru X, do których należy liczba 7,
- zdarzenie B składa się z tych dwuelementowych podzbiorów Z zbioru X, których elementy dają w sumie liczbę parzystą.

Inaczej mówiąc:

- zdarzenie A składa się z tych dwuelementowych podzbiorów zbioru X postaci $\{7, x\}$, gdzie $x \in X$ oraz $x \neq 7$,
- zdarzenie B składa się z tych dwuelementowych podzbiorów $\{x, y\}$ zbioru X, dla których suma $x + y$ jest liczbą parzystą.

Musimy obliczyć $|A \cap B|$ oraz $|B|$. Tak jak w zadaniu 35f otrzymujemy $|B| = 30$. Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy policzyć takie zbiory dwuelementowe postaci $\{7, x\}$ (gdzie $x \neq 7$), dla których liczba $7 + x$ jest parzysta. A więc liczba x ma być nieparzysta. Mamy 5 takich liczb w zbiorze X. Zatem $|A \cap B| = 5$. Stąd wynika, że

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

To kończy rozwiązanie zadania.

Rozwiążmy teraz dwa zadania ogólniejsze.

Zadanie 35h. Dane są dwie liczby naturalne n i k takie, że $1 \leq k \leq n$. Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba k, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

Zadanie 35i. Dane są dwie liczby naturalne n i k takie, że $1 \leq k \leq n$. Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba k, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie parzysta.

Okaże się, że w każdym z tych zadań należy rozważyć cztery przypadki w zależności od tego, czy liczby n i k są parzyste czy nieparzyste. Zajmijmy się zatem najpierw zadaniem 35a.

Rozwiązanie zadania 35h. Zdarzeniami elementarnymi są dwuelementowe podzbiory zbioru

$$X = \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}.$$

W zbiorze Ω zdarzeń elementarnych wyróżniamy dwa zdarzenia:

- zdarzenie A składa się z tych dwuelementowych podzbiorów Y zbioru X, do których należy liczba k,
- zdarzenie B składa się z tych dwuelementowych podzbiorów Z zbioru X, których elementy dają w sumie liczbę nieparzystą.

Inaczej mówiąc:

- zdarzenie A składa się z tych dwuelementowych podzbiorów zbioru X postaci $\{k, x\}$, gdzie $x \in X$ oraz $x \neq k$,

- zdarzenie B składa się z tych dwuelementowych podzbiorów $\{x, y\}$ zbioru X, dla których suma $x + y$ jest liczbą nieparzystą.

Musimy obliczyć $|A \cap B|$ oraz $|B|$. Będziemy rozważać cztery przypadki.

Przypadek 1. Liczby n i k są parzyste. Niech $n = 2m$.

Najpierw obliczamy $|B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy ze zbioru X wybrać dwie liczby, których suma jest liczbą nieparzystą. Suma dwóch liczb jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z tych liczb jest parzysta i druga jest nieparzysta. Mamy zatem:

- wybrać jedną liczbę ze zbioru $\{2, 4, \ldots, 2m\}$,
- oraz wybrać jedną liczbę ze zbioru $\{1, 3, \ldots, 2m - 1\}$.

W obu przypadkach mamy wybrać liczbę ze zbioru m-elementowego. Mamy zatem

$$|B| = m \cdot m = m^2.$$

Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy wybrać zbiór dwuelementowy postaci $\{k, x\}$, gdzie $x \in X$, $x \neq k$ oraz suma $x + k$ jest liczbą nieparzystą. Ponieważ k jest liczbą parzystą, więc x musi być liczbą nieparzystą. W zbiorze X istnieje m takich liczb x. Zatem

$$|A \cap B| = m.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{m}{m^2} = \frac{1}{m} = \frac{2}{2m} = \frac{2}{n}.$$

Przypadek 2. Liczba n jest parzysta oraz liczba k jest nieparzysta. Niech $n = 2m$.

Najpierw obliczamy $|B|$. Dokładnie tak jak w przypadku 1 stwierdzamy, że $|B| = m^2$. Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy wybrać zbiór dwuelementowy postaci $\{k, x\}$, gdzie $x \in X$, $x \neq k$ oraz suma $x + k$ jest liczbą nieparzystą. Ponieważ k jest liczbą nieparzystą, więc x musi być liczbą parzystą. W zbiorze X istnieje m takich liczb x. Zatem

$$|A \cap B| = m - 1.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{m}{m^2} = \frac{1}{m} = \frac{2}{2m} = \frac{2}{n}.$$

Przypadek 3. Liczba n jest nieparzysta oraz liczba k jest parzysta. Niech $n = 2m + 1$.

Najpierw obliczamy $|B|$. Dokładnie tak jak w przypadku 1 stwierdzamy, że musimy ze zbioru X wybrać jedną liczbę parzystą i jedną liczbę nieparzystą. W zbiorze X mamy m liczb parzystych i $m + 1$ liczb nieparzystych. Mamy zatem

$$|B| = m(m + 1).$$

Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy wybrać zbiór dwuelementowy postaci $\{k, x\}$, gdzie $x \in X$, $x \neq k$ oraz suma $x + k$ jest liczbą nieparzystą. Ponieważ k jest liczbą parzystą, więc x musi być liczbą nieparzystą. W zbiorze X istnieje $m + 1$ takich liczb x. Zatem

$$|A \cap B| = m + 1.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{m+1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} = \frac{2}{2m} = \frac{2}{n-1}.$$

Przypadek 4. Liczby n i k są nieparzyste. Niech $n = 2m + 1$. Zatem $m = \frac{n-1}{2}$. Najpierw obliczamy $|B|$. Dokładnie tak jak w przypadku 3 otrzymujemy

$$|B| = m(m + 1).$$

Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy wybrać zbiór dwuelementowy postaci $\{k, x\}$, gdzie $x \in X$, $x \neq k$ oraz suma $x + k$ jest liczbą nieparzystą. Ponieważ k jest liczbą nieparzystą, więc x musi być liczbą parzystą. W zbiorze X istnieje m takich liczb x. Zatem

$$|A \cap B| = m.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{m}{m(m+1)} = \frac{1}{m+1} = \frac{2}{2m+2} = \frac{2}{n+1}.$$

Zbierzmy razem odpowiedzi w rozważanych czterech przypadkach:

- jeśli n i k są liczbami parzystymi, to $P(A \mid B) = \dfrac{2}{n}$,
- jeśli n jest liczbą parzystą i k jest liczbą nieparzystą, to $P(A \mid B) = \dfrac{2}{n}$,
- jeśli n jest liczbą nieparzystą i k jest liczbą parzystą, to $P(A \mid B) = \dfrac{2}{n-1}$,
- jeśli n i k są liczbami nieparzystymi, to $P(A \mid B) = \dfrac{2}{n+1}$.

Teraz przejdziemy do rozwiązania zadania 35i.

Rozwiązanie zadania 35i. Zdarzeniami elementarnymi są dwuelementowe podzbiory zbioru

$$X = \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}.$$

W zbiorze Ω zdarzeń elementarnych wyróżniamy dwa zdarzenia:

- zdarzenie A składa się z tych dwuelementowych podzbiorów Y zbioru X, do których należy liczba k,

- zdarzenie B składa się z tych dwuelementowych podzbiorów Z zbioru X, których elementy dają w sumie liczbę parzystą.

Inaczej mówiąc:

- zdarzenie A składa się z tych dwuelementowych podzbiorów zbioru X postaci $\{k, x\}$, gdzie $x \in X$ oraz $x \neq k$,
- zdarzenie B składa się z tych dwuelementowych podzbiorów $\{x, y\}$ zbioru X, dla których suma $x + y$ jest liczbą parzystą.

Musimy obliczyć $|A \cap B|$ oraz $|B|$. Będziemy rozważać cztery przypadki.

Przypadek 1. Liczby n i k są parzyste. Niech $n = 2m$.

Najpierw obliczamy $|B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy ze zbioru X wybrać dwie liczby, których suma jest liczbą parzystą. Możemy wybrać dwie liczby parzyste lub dwie liczby nieparzyste. Inaczej mówiąc:

- możemy wybrać dwie liczby ze zbioru $\{2, 4, \ldots, 2m\}$,
- możemy wybrać dwie liczby ze zbioru $\{1, 3, \ldots, 2m - 1\}$.

W obu przypadkach mamy wybrać dwie liczby ze zbioru m-elementowego. Mamy zatem

$$|B| = 2 \cdot \binom{m}{2} = 2 \cdot \frac{m(m-1)}{2} = m(m-1).$$

Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy wybrać zbiór dwuelementowy postaci $\{k, x\}$, gdzie $x \in X$, $x \neq k$ oraz suma $x + k$ jest liczbą parzystą. Ponieważ k jest liczbą parzystą, więc x też musi być liczbą parzystą. Ponadto $x \neq k$. W zbiorze X istnieje $m - 1$ takich liczb x. Zatem

$$|A \cap B| = m - 1.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{m-1}{m(m-1)} = \frac{1}{m} = \frac{2}{2m} = \frac{2}{n}.$$

Przypadek 2. Liczba n jest parzysta oraz liczba k jest nieparzysta. Niech $n = 2m$.

Najpierw obliczamy $|B|$. Dokładnie tak jak w przypadku 1 stwierdzamy, że

$$|B| = 2 \cdot \binom{m}{2} = 2 \cdot \frac{m(m-1)}{2} = m(m-1).$$

Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy wybrać zbiór dwuelementowy postaci $\{k, x\}$, gdzie $x \in X$, $x \neq k$ oraz suma $x + k$ jest liczbą parzystą. Ponieważ k jest liczbą nieparzystą, więc x też musi być liczbą nieparzystą. Ponadto $x \neq k$. W zbiorze X istnieje $m - 1$ takich liczb x. Zatem

$$|A \cap B| = m - 1.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{m-1}{m(m-1)} = \frac{1}{m} = \frac{2}{2m} = \frac{2}{n}.$$

Przypadek 3. Liczba n jest nieparzysta oraz liczba k jest parzysta. Niech $n = 2m+1$. Zatem $m = \frac{n-1}{2}$.

Najpierw obliczamy $|B|$. Dokładnie tak jak w przypadku 1 stwierdzamy, że musimy ze zbioru X wybrać dwie liczby parzyste lub dwie liczby nieparzyste. W zbiorze X mamy m liczb parzystych i $m+1$ liczb nieparzystych. Mamy zatem

$$|B| = \binom{m}{2} + \binom{m+1}{2} = \frac{m(m-1)}{2} + \frac{(m+1)m}{2} = \frac{m^2-m+m^2+m}{2} = \frac{2m^2}{2} = m^2.$$

Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy wybrać zbiór dwuelementowy postaci $\{k, x\}$, gdzie $x \in X$, $x \neq k$ oraz suma $x+k$ jest liczbą parzystą. Ponieważ k jest liczbą parzystą, więc x też musi być liczbą parzystą. Ponadto $x \neq k$. W zbiorze X istnieje $m-1$ takich liczb x. Zatem

$$|A \cap B| = m-1.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{m-1}{m^2} = \frac{\frac{n-1}{2}-1}{\frac{(n-1)^2}{4}} = \frac{2(n-1)-4}{(n-1)^2} = \frac{2n-6}{(n-1)^2} = \frac{2(n-3)}{(n-1)^2}.$$

Przypadek 4. Liczby n i k są nieparzyste. Niech $n = 2m+1$. Zatem $m = \frac{n-1}{2}$.

Najpierw obliczamy $|B|$. Dokładnie tak jak w przypadku 3 otrzymujemy

$$|B| = \binom{m}{2} + \binom{m+1}{2} = \frac{m(m-1)}{2} + \frac{(m+1)m}{2} = \frac{m^2-m+m^2+m}{2} = \frac{2m^2}{2} = m^2.$$

Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy wybrać zbiór dwuelementowy postaci $\{k, x\}$, gdzie $x \in X$, $x \neq k$ oraz suma $x+k$ jest liczbą parzystą. Ponieważ k jest liczbą nieparzystą, więc x też musi być liczbą nieparzystą. Ponadto $x \neq k$. W zbiorze X istnieje m takich liczb x. Zatem

$$|A \cap B| = m.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{m}{m^2} = \frac{1}{m} = \frac{2}{n-1}.$$

Zbierzmy razem odpowiedzi w rozważanych czterech przypadkach:

- jeśli n i k są liczbami parzystymi, to $P(A \mid B) = \frac{2}{n}$,
- jeśli n jest liczbą parzystą i k jest liczbą nieparzystą, to $P(A \mid B) = \frac{2}{n}$,
- jeśli n jest liczbą nieparzystą i k jest liczbą parzystą, to $P(A \mid B) = \frac{2(n-3)}{(n-1)^2}$,
- jeśli n i k są liczbami nieparzystymi, to $P(A \mid B) = \frac{2}{n-1}$.

Rozwiążmy teraz analogiczne zadania, w których będziemy losować trzy liczby ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$. Oto te zadania.

Zadanie 35j. Dane są dwie liczby naturalne n i k takie, że $1 \leq k \leq n$. Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie trzy liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba k, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

Zadanie 35k. Dane są dwie liczby naturalne n i k takie, że $1 \leq k \leq n$. Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie trzy liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba k, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie parzysta.

Zobaczymy najpierw rozwiązania dla konkretnych wartości n i k; podobnie jak to miało miejsce w przypadku losowania dwóch liczb przyjmiemy $n = 13$ lub $n = 12$ oraz $k = 8$ lub $k = 7$. Zacznijmy od zadania 35j.

Rozwiązanie zadania 35j dla konkretnych liczb. Zdarzeniami elementarnymi są trzyelementowe podzbiory zbioru

$$X = \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}.$$

W zbiorze Ω zdarzeń elementarnych wyróżniamy dwa zdarzenia:

- zdarzenie A składa się z tych trzyelementowych podzbiorów Y zbioru X, do których należy liczba k,
- zdarzenie B składa się z tych trzyelementowych podzbiorów Z zbioru X, których elementy dają w sumie liczbę nieparzystą.

Inaczej mówiąc:

- zdarzenie A składa się z tych trzyelementowych podzbiorów zbioru X postaci $\{k, x, y\}$, gdzie $x, y \in X$, $x \neq y$, $x \neq k$ oraz $y \neq k$,
- zdarzenie B składa się z tych trzyelementowych podzbiorów $\{x, y, z\}$ (gdzie $x \neq y$, $x \neq z$ oraz $y \neq z$) zbioru X, dla których suma $x + y + z$ jest liczbą nieparzystą.

Musimy obliczyć $|A \cap B|$ oraz $|B|$. Rozpatrzymy cztery przykłady.

Przykład 1. $n = 13$ oraz $k = 8$.

Najpierw obliczamy $|B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy ze zbioru X wybrać trzy liczby, których suma jest liczbą nieparzystą. Suma trzech liczb jest nieparzysta w dwóch przypadkach: gdy wszystkie trzy liczby są nieparzyste oraz gdy jedna z tych liczb jest nieparzysta i dwie są parzyste. W zbiorze X mamy w tym przypadku 6 liczb parzystych i 7 liczb nieparzystych. Mamy zatem:

$$|B| = \binom{7}{3} + \binom{7}{1} \cdot \binom{6}{2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} + 7 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 35 + 7 \cdot 15 = 35 + 105 = 140.$$

Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy ze zbioru

$$X \setminus \{8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13\}$$

wybrać dwie różne liczby x i y takie, by suma $8+x+y$ była liczbą nieparzystą. Ponieważ 8 jest liczbą parzystą, więc suma $x+y$ musi być liczbą nieparzystą. Zatem jedna z tych dwóch liczb musi być parzysta, a druga nieparzysta. W zbiorze $X \setminus \{8\}$ mamy 5 liczb parzystych i 7 liczb nieparzystych. Zatem

$$|A \cap B| = 5 \cdot 7 = 35.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{35}{140} = \frac{1}{4}.$$

Przykład 2. $n = 13$ oraz $k = 7$.

Najpierw obliczamy $|B|$. Dokładnie tak jak w przypadku 1 mamy $|B| = 140$. Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy ze zbioru $X \setminus \{7\}$ wybrać dwie różne liczby x i y tak, by suma $7+x+y$ była liczbą nieparzystą. Ponieważ 7 jest liczbą nieparzystą, więc suma $x+y$ musi być liczbą parzystą. Jest to możliwe w dwóch przypadkach: obie liczby x i y muszą być parzyste lub obie nieparzyste. W zbiorze $X \setminus \{7\}$ mamy po 6 liczb parzystych i nieparzystych. Zatem

$$|A \cap B| = \binom{6}{2} + \binom{6}{2} = 2 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 30.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{30}{140} = \frac{3}{14}.$$

Przykład 3. $n = 12$ oraz $k = 8$.

Najpierw obliczamy $|B|$. Dokładnie tak jak w przypadku 1 stwierdzamy, że musimy ze zbioru X wybrać trzy liczby nieparzyste lub jedną liczbę nieparzystą i dwie liczby parzyste. W zbiorze X tym razem mamy po 6 liczb parzystych i nieparzystych. Mamy zatem

$$|B| = \binom{6}{3} + \binom{6}{1} \cdot \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} + 6 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 20 + 6 \cdot 15 = 110.$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA · IBE entuzjaści edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy ze zbioru $X \setminus \{8\}$ wybrać dwie różne liczby x i y tak, by suma $8+x+y$ była liczbą nieparzystą. Ponieważ 8 jest liczbą parzystą, więc suma $x+y$ musi być liczbą nieparzystą. Jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z liczb x i y jest parzysta, a druga nieparzysta. W zbiorze $X \setminus \{8\}$ istnieje 5 liczb parzystych i 6 nieparzystych. Zatem

$$|A \cap B| = 6 \cdot 5 = 30.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{30}{110} = \frac{3}{11}.$$

Przykład 4. $n = 12$ oraz $k = 7$.

Najpierw obliczamy $|B|$. Dokładnie tak jak w przypadku 3 mamy $|B| = 110$. Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy ze zbioru $X \setminus \{7\}$ wybrać dwie różne liczby x i y tak, by suma $7+x+y$ była liczbą nieparzystą. Ponieważ 7 jest liczbą nieparzystą, więc suma $x+y$ musi być liczbą parzystą. Jest to możliwe w dwóch przypadkach: jeśli obie liczby x i y są parzyste lub obie są nieparzyste. W zbiorze $X \setminus \{7\}$ istnieje 6 liczb parzystych i 5 nieparzystych. Zatem

$$|A \cap B| = \binom{6}{2} + \binom{5}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} + \frac{5 \cdot 4}{2} = 15 + 10 = 25.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{25}{110} = \frac{5}{22}.$$

Zbierzmy razem odpowiedzi w rozważanych czterech przykładach:

- jeśli $n = 13$ i $k = 8$, to $P(A \mid B) = \frac{1}{4}$,
- jeśli $n = 13$ i $k = 7$, to $P(A \mid B) = \frac{3}{14}$,
- jeśli $n = 12$ i $k = 8$, to $P(A \mid B) = \frac{3}{11}$,
- jeśli $n = 12$ i $k = 7$, to $P(A \mid B) = \frac{5}{22}$.

Zauważmy, że w tym zadaniu w czterech przykładach otrzymaliśmy różne odpowiedzi. Teraz rozwiążemy to samo zadanie w przypadku ogólnym.

Rozwiązanie zadania 35j dla dowolnych liczb. Zdarzeniami elementarnymi są trzyelementowe podzbiory zbioru

$$X = \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}.$$

W zbiorze Ω zdarzeń elementarnych wyróżniamy dwa zdarzenia:

- zdarzenie A składa się z tych trzyelementowych podzbiorów Y zbioru X, do których należy liczba k,
- zdarzenie B składa się z tych trzyelementowych podzbiorów Z zbioru X, których elementy dają w sumie liczbę nieparzystą.

Inaczej mówiąc:

- zdarzenie A składa się z tych trzyelementowych podzbiorów zbioru X postaci $\{k, x, y\}$, gdzie $x, y \in X$, $x \neq y$, $x \neq k$ oraz $y \neq k$,
- zdarzenie B składa się z tych trzyelementowych podzbiorów $\{x, y, z\}$ (gdzie $x \neq y$, $x \neq z$ oraz $y \neq z$) zbioru X, dla których suma $x + y + z$ jest liczbą nieparzystą.

Musimy obliczyć $|A \cap B|$ oraz $|B|$. Będziemy rozważać cztery przypadki.

Przypadek 1. $n = 2m + 1$ oraz liczba k jest parzysta.

Najpierw obliczamy $|B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy ze zbioru X wybrać trzy liczby, których suma jest liczbą nieparzystą. Suma trzech liczb jest nieparzysta w dwóch przypadkach: gdy wszystkie trzy liczby są nieparzyste oraz gdy jedna z tych liczb jest nieparzysta i dwie są parzyste. W zbiorze X mamy w tym przypadku m liczb parzystych i $m + 1$ liczb nieparzystych. Mamy zatem:

$$|B| = \binom{m+1}{3} + \binom{m+1}{1} \cdot \binom{m}{2} = \frac{(m+1) \cdot m \cdot (m-1)}{6} + (m+1) \cdot \frac{m \cdot (m-1)}{2} =$$
$$= \frac{2m(m+1)(m-1)}{3}.$$

Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy ze zbioru

$$X \setminus \{k\} = \{1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n-1, n\}$$

wybrać dwie różne liczby x i y takie, by suma $k+x+y$ była liczbą nieparzystą. Ponieważ k jest liczbą parzystą, więc suma $x + y$ musi być liczbą nieparzystą. Zatem jedna z tych dwóch liczb musi być parzysta, a druga nieparzysta. W zbiorze $X \setminus \{k\}$ mamy $m - 1$ liczb parzystych i $m + 1$ liczb nieparzystych. Zatem

$$|A \cap B| = (m-1) \cdot (m+1).$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{3 \cdot (m-1)(m+1)}{2m(m-1)(m=1)} = \frac{3}{2m} = \frac{3}{n-1}.$$

Przypadek 2. $n = 2m + 1$ oraz liczba k jest nieparzysta.

Najpierw obliczamy $|B|$. Dokładnie tak jak w przypadku 1 stwierdzamy, że

$$|B| = \frac{2m(m+1)(m-1)}{3}.$$

Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy ze zbioru

$$X \setminus \{k\} = \{1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n-1, n\}$$

wybrać dwie różne liczby x i y tak, by suma $k+x+y$ była liczbą nieparzystą. Ponieważ k jest liczbą nieparzystą, więc suma $x+y$ musi być liczbą parzystą. Jest to możliwe w dwóch przypadkach: obie liczby x i y muszą być parzyste lub obie nieparzyste. W zbiorze $X \setminus \{k\}$ mamy po m liczb parzystych i nieparzystych. Zatem

$$|A \cap B| = \binom{m}{2} + \binom{m}{2} = 2 \cdot \frac{m \cdot (m-1)}{2} = m(m-1).$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{3m(m-1)}{2m(m+1)(m-1)} = \frac{3}{2(m+1)} = \frac{3}{2m+2} = \frac{3}{n+1}.$$

Przypadek 3. $n = 2m$ oraz liczba k jest parzysta.

Najpierw obliczamy $|B|$. Dokładnie tak jak w przypadku 1 stwierdzamy, że musimy ze zbioru X wybrać trzy liczby nieparzyste lub jedną liczbę nieparzystą i dwie liczby parzyste. W zbiorze X tym razem mamy po m liczb parzystych i nieparzystych. Mamy zatem

$$|B| = \binom{m}{3} + \binom{m}{1} \cdot \binom{m}{2} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{6} + m \cdot \frac{m \cdot (m-1)}{2} =$$
$$= \frac{m(m-1)}{2} \cdot \left(\frac{m-2}{3} + m \right) = \frac{m(m-1)}{2} \cdot \frac{4m-2}{3} = \frac{m(m-1)(2m-1)}{3}.$$

Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy ze zbioru $X \setminus \{k\}$ wybrać dwie różne liczby x i y tak, by suma $k+x+y$ była liczbą nieparzystą. Ponieważ k jest liczbą parzystą, więc suma $x+y$ musi być liczbą nieparzystą. Jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z liczb x i y jest parzysta, a druga nieparzysta. W zbiorze $X \setminus \{k\}$ istnieje $m-1$ liczb parzystych i m nieparzystych. Zatem

$$|A \cap B| = (m-1) \cdot m.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{3m(m-1)}{m(m-1)(2m-1)} = \frac{3}{2m-1} = \frac{3}{n-1}.$$

Przypadek 4. $n = 2m$ oraz liczba k jest nieparzysta.

Najpierw obliczamy $|B|$. Dokładnie tak jak w przypadku 3 otrzymujemy

$$|B| = \frac{m(m-1)(2m-1)}{3}.$$

Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Mamy obliczyć, na ile sposobów możemy ze zbioru $X \setminus \{k\}$ wybrać dwie różne liczby x i y tak, by suma $k + x + y$ była liczbą nieparzystą. Ponieważ 7 jest liczbą nieparzystą, więc suma $x+y$ musi być liczbą parzystą. Jest to możliwe w dwóch przypadkach: jeśli obie liczby x i y są parzyste lub obie są nieparzyste. W zbiorze $X \setminus \{k\}$ istnieje m liczb parzystych i $m-1$ nieparzystych. Zatem

$$|A \cap B| = \binom{m}{2} + \binom{m-1}{2} = \frac{m \cdot (m-1)}{2} + \frac{(m-1) \cdot (m-2)}{2} =$$
$$= \frac{m-1}{2} \cdot (m + m - 2) = \frac{(m-1)(2m-2)}{2} = (m-1)^2.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{3(m-1)^2}{m(m-1)(2m-1)} = \frac{3(m-1)}{m(2m-1)} = \frac{3(2m-2)}{(2m)(2m-1)} = \frac{3(n-2)}{n(n-1)}.$$

Zbierzmy razem odpowiedzi w rozważanych czterech przypadkach:

- jeśli n jest liczbą nieparzystą i k jest liczbą parzystą, to $P(A \mid B) = \dfrac{3}{n-1}$,
- jeśli n jest liczbą nieparzystą i k jest liczbą nieparzystą, to $P(A \mid B) = \dfrac{3}{n+1}$,
- jeśli n jest liczbą parzystą i k jest liczbą parzystą, to $P(A \mid B) = \dfrac{3}{n-1}$,
- jeśli n jest liczbą parzystą i k jest liczbą nieparzystą, to $P(A \mid B) = \dfrac{3(n-2)}{n(n-1)}$.

Przejdźmy teraz do zadania 35k. Przypomnijmy jego treść.

Zadanie 35k. Dane są dwie liczby naturalne n i k takie, że $1 \leq k \leq n$. Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie trzy liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba k, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie parzysta.

Rozwiązanie zadania 35k dla konkretnych liczb. Zdarzeniami elementarnymi są trzyelementowe podzbiory zbioru

$$X = \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}.$$

W zbiorze Ω zdarzeń elementarnych wyróżniamy dwa zdarzenia:

- zdarzenie A składa się z tych trzyelementowych podzbiorów Y zbioru X, do których należy liczba k,
- zdarzenie B składa się z tych trzyelementowych podzbiorów Z zbioru X, których elementy dają w sumie liczbę parzystą.

Inaczej mówiąc:

- zdarzenie A składa się z tych trzyelementowych podzbiorów zbioru X postaci $\{k, x, y\}$, gdzie $x, y \in X$, $x \neq y$, $x \neq k$ oraz $y \neq k$,

- zdarzenie B składa się z tych trzyelementowych podzbiorów $\{x, y, z\}$ (gdzie $x \neq y$, $x \neq z$ oraz $y \neq z$) zbioru X, dla których suma $x + y + z$ jest liczbą parzystą.

Musimy obliczyć $|A \cap B|$ oraz $|B|$. Rozpatrzymy cztery przykłady.

Przykład 1. $n = 13$ oraz $k = 8$.

Najpierw obliczamy $|B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy ze zbioru X wybrać trzy liczby, których suma jest liczbą parzystą. Suma trzech liczb jest parzysta w dwóch przypadkach: gdy wszystkie trzy liczby są parzyste oraz gdy jedna z tych liczb jest parzysta i dwie są nieparzyste. W zbiorze X mamy w tym przypadku 6 liczb parzystych i 7 liczb nieparzystych. Mamy zatem:

$$|B| = \binom{6}{3} + \binom{6}{1} \cdot \binom{7}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} + 6 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = 20 + 6 \cdot 21 = 20 + 126 = 146.$$

Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy ze zbioru

$$X \setminus \{8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13\}$$

wybrać dwie różne liczby x i y takie, by suma $8 + x + y$ była liczbą parzystą. Ponieważ 8 jest liczbą parzystą, więc suma $x + y$ musi być liczbą parzystą. Jest to możliwe w dwóch przypadkach: obie liczby x i y muszą być parzyste lub obie nieparzyste. W zbiorze $X \setminus \{8\}$ mamy 5 liczb parzystych i 7 liczb nieparzystych. Zatem

$$|A \cap B| = \binom{5}{2} + \binom{7}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} + \frac{7 \cdot 6}{2} = 10 + 21 = 31.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{31}{146}.$$

Przykład 2. $n = 13$ oraz $k = 7$.

Najpierw obliczamy $|B|$. Dokładnie tak jak w przypadku 1 mamy $|B| = 146$. Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy ze zbioru $X \setminus \{7\}$ wybrać dwie różne liczby x i y tak, by suma $7 + x + y$ była liczbą parzystą. Ponieważ 7 jest liczbą nieparzystą, więc suma $x + y$ musi być liczbą nieparzystą. Zatem jedna z tych dwóch liczb musi być parzysta, a druga nieparzysta. W zbiorze $X \setminus \{7\}$ mamy po 6 liczb parzystych i nieparzystych. Zatem

$$|A \cap B| = 6 \cdot 6 = 36.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{36}{146} = \frac{18}{73}.$$

Przykład 3. $n = 12$ oraz $k = 8$.

Najpierw obliczamy $|B|$. Dokładnie tak jak w przypadku 1 stwierdzamy, że musimy ze zbioru X wybrać trzy liczby parzyste lub jedną liczbę parzystą i dwie liczby nieparzyste. W zbiorze X tym razem mamy po 6 liczb parzystych i nieparzystych. Mamy zatem

$$|B| = \binom{6}{3} + \binom{6}{1} \cdot \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} + 6 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 20 + 6 \cdot 15 = 110.$$

Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy ze zbioru $X \setminus \{8\}$ wybrać dwie różne liczby x i y tak, by suma $8 + x + y$ była liczbą parzystą. Ponieważ 8 jest liczbą parzystą, więc suma $x + y$ musi być liczbą parzystą. Jest to możliwe w dwóch przypadkach: jeśli obie liczby x i y są parzyste lub obie są nieparzyste. W zbiorze $X \setminus \{8\}$ istnieje 5 liczb parzystych i 6 nieparzystych. Zatem

$$|A \cap B| = \binom{6}{2} + \binom{5}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} + \frac{5 \cdot 4}{2} = 15 + 10 = 25.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{25}{110} = \frac{5}{22}.$$

Przykład 4. $n = 12$ oraz $k = 7$.

Najpierw obliczamy $|B|$. Dokładnie tak jak w przypadku 3 otrzymujemy $|B| = 110$. Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy ze zbioru $X \setminus \{7\}$ wybrać dwie różne liczby x i y tak, by suma $7 + x + y$ była liczbą parzystą. Ponieważ 7 jest liczbą nieparzystą, więc suma $x + y$ musi być liczbą nieparzystą. Jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z liczb x i y jest parzysta, a druga nieparzysta. W zbiorze $X \setminus \{7\}$ istnieje 6 liczb parzystych i 5 nieparzystych. Zatem

$$|A \cap B| = 6 \cdot 5 = 30.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{30}{110} = \frac{3}{11}.$$

Zbierzmy razem odpowiedzi w rozważanych czterech przykładach:

- jeśli $n = 13$ i $k = 8$, to $P(A \mid B) = \frac{31}{146}$,
- jeśli $n = 13$ i $k = 7$, to $P(A \mid B) = \frac{18}{73}$,
- jeśli $n = 12$ i $k = 8$, to $P(A \mid B) = \frac{5}{22}$,
- jeśli $n = 12$ i $k = 7$, to $P(A \mid B) = \frac{3}{11}$.

Zauważmy, że w tym zadaniu w czterech przykładach także otrzymaliśmy cztery różne odpowiedzi. Teraz rozwiążemy to samo zadanie w przypadku ogólnym.

Rozwiązanie zadania 35k dla dowolnych liczb. Zdarzeniami elementarnymi są trzyelementowe podzbiory zbioru

$$X = \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}.$$

W zbiorze Ω zdarzeń elementarnych wyróżniamy dwa zdarzenia:

- zdarzenie A składa się z tych trzyelementowych podzbiorów Y zbioru X, do których należy liczba k,
- zdarzenie B składa się z tych trzyelementowych podzbiorów Z zbioru X, których elementy dają w sumie liczbę parzystą.

Inaczej mówiąc:

- zdarzenie A składa się z tych trzyelementowych podzbiorów zbioru X postaci $\{k, x, y\}$, gdzie $x, y \in X$, $x \neq y$, $x \neq k$ oraz $y \neq k$,
- zdarzenie B składa się z tych trzyelementowych podzbiorów $\{x, y, z\}$ (gdzie $x \neq y$, $x \neq z$ oraz $y \neq z$) zbioru X, dla których suma $x + y + z$ jest liczbą parzystą.

Musimy obliczyć $|A \cap B|$ oraz $|B|$. Będziemy rozważać cztery przypadki.

Przypadek 1. $n = 2m + 1$ oraz liczba k jest parzysta.

Najpierw obliczamy $|B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy ze zbioru X wybrać trzy liczby, których suma jest liczbą parzystą. Suma trzech liczb jest parzysta w dwóch przypadkach: gdy wszystkie trzy liczby są parzyste oraz gdy jedna z tych liczb jest parzysta i dwie są nieparzyste. W zbiorze X mamy w tym przypadku m liczb parzystych i $m + 1$ liczb nieparzystych. Mamy zatem:

$$\begin{aligned} |B| &= \binom{m}{3} + \binom{m}{1} \cdot \binom{m+1}{2} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{6} + m \cdot \frac{(m+1) \cdot m}{2} = \\ &= \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{(m-1)(m-2)}{3} + m(m+1) \right) = \frac{m}{2} \cdot \frac{m^2 - 3m + 2 + 3m^2 + 3m}{3} = \\ &= \frac{m(4m^2+2)}{6} = \frac{m(2m^2+1)}{3}. \end{aligned}$$

Teraz obliczamy $|A \cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy ze zbioru

$$X \setminus \{k\} = \{1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n-1, n\}$$

wybrać dwie różne liczby x i y takie, by suma $k+x+y$ była liczbą parzystą. Ponieważ k jest liczbą parzystą, więc suma $x+y$ musi być liczbą parzystą. Jest to możliwe w dwóch przypadkach: obie liczby x i y muszą być parzyste lub obie nieparzyste. W zbiorze $X \setminus \{k\}$ mamy $m - 1$ liczb parzystych i $m + 1$ liczb nieparzystych. Zatem

$$\begin{aligned} |A \cap B| &= \binom{m-1}{2} + \binom{m+1}{2} = \frac{(m-1) \cdot (m-2)}{2} + \frac{(m+1) \cdot m}{2} = \\ &= \frac{m^2 - 3m + 2 + m^2 + m}{2} = m^2 - m + 1. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$\begin{aligned}P(A\mid B)&=\frac{|A\cap B|}{|B|}=\frac{3(m^2-m+1)}{m(2m^2+1)}=\frac{3(4m^2-4m+4)}{(2m)(4m^2+2)}=\\&=\frac{3\big((2m)^2-2\cdot 2m+4\big)}{(2m)\big((2m)^2+2\big)}=\frac{3\big((n-1)^2-2(n-1)+4\big)}{(n-1)\big((n-1)^2+2\big)}=\\&=\frac{3(n^2-2n+1-2n+2+4)}{(n-1)(n^2-2n+3)}=\frac{3(n^2-4n+7)}{(n-1)(n^2-2n+3)}.\end{aligned}$$

Przypadek 2. $n=2m+1$ oraz liczba k jest nieparzysta.

Najpierw obliczamy $|B|$. Dokładnie tak jak w przypadku 1 mamy

$$|B|=\frac{m(4m^2+2)}{6}=\frac{m(2m^2+1)}{3}.$$

Teraz obliczamy $|A\cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy ze zbioru $X\setminus\{k\}$ wybrać dwie różne liczby x i y tak, by suma $k+x+y$ była liczbą parzystą. Ponieważ k jest liczbą nieparzystą, więc suma $x+y$ musi być liczbą nieparzystą. Zatem jedna z tych dwóch liczb musi być parzysta, a druga nieparzysta. W zbiorze $X\setminus\{k\}$ mamy po m liczb parzystych i nieparzystych. Zatem

$$|A\cap B|=m\cdot m=m^2.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$\begin{aligned}P(A\mid B)&=\frac{|A\cap B|}{|B|}=\frac{3m^2}{m(2m^2+1)}=\frac{3m}{2m^2+1}=\frac{3\cdot(2m)}{(2m)^2+2}=\frac{3(n-1)}{(n-1)^2+2}\\&=\frac{3(n-1)}{n^2-2n+3}.\end{aligned}$$

Przypadek 3. $n=2m$ oraz liczba k jest parzysta.

Najpierw obliczamy $|B|$. Dokładnie tak jak w przypadku 1 stwierdzamy, że musimy ze zbioru X wybrać trzy liczby parzyste lub jedną liczbę parzystą i dwie liczby nieparzyste. W zbiorze X tym razem mamy po m liczb parzystych i nieparzystych. Mamy zatem

$$\begin{aligned}|B|&=\binom{m}{3}+\binom{m}{1}\cdot\binom{m}{2}=\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{6}+m\cdot\frac{m\cdot(m-1)}{2}=\\&=\frac{m(m-1)}{2}\cdot\left(\frac{m-2}{3}+m\right)=\frac{m(m-1)}{2}\cdot\frac{4m-2}{3}=\frac{m(m-1)(2m-1)}{3}.\end{aligned}$$

Teraz obliczamy $|A\cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy ze zbioru $X\setminus\{k\}$ wybrać dwie różne liczby x i y tak, by suma $k+x+y$ była liczbą parzystą. Ponieważ k jest liczbą parzystą, więc suma $x+y$ musi być liczbą parzystą. Jest to możliwe w dwóch przypadkach: jeśli obie liczby x i y są parzyste lub obie są nieparzyste. W zbiorze $X\setminus\{k\}$ istnieje $m-1$ liczb parzystych i m nieparzystych. Zatem

$$|A\cap B| = \binom{m}{2} + \binom{m-1}{2} = \frac{m\cdot(m-1)}{2} + \frac{(m-1)\cdot(m-2)}{2} = \\ = \frac{m-1}{2}\cdot(m+m-2) = (m-1)^2.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A\mid B) = \frac{|A\cap B|}{|B|} = \frac{3(m-1)^2}{m(m-1)(2m-1)} = \frac{3(m-1)}{m(2m-1)} = \frac{3(2m-2)}{(2m)(2m-1)} = \frac{3(n-2)}{n(n-1)}.$$

Przypadek 4. $n=2m$ oraz liczba k jest nieparzysta.
Najpierw obliczamy $|B|$. Dokładnie tak jak w przypadku 3 otrzymujemy

$$|B| = \frac{m(m-1)(2m-1)}{3}.$$

Teraz obliczamy $|A\cap B|$. Musimy obliczyć, na ile sposobów możemy ze zbioru $X\setminus\{k\}$ wybrać dwie różne liczby x i y tak, by suma $k+x+y$ była liczbą parzystą. Ponieważ k jest liczbą nieparzystą, więc suma $x+y$ musi być liczbą nieparzystą. Jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z liczb x i y jest parzysta, a druga nieparzysta. W zbiorze $X\setminus\{k\}$ istnieje m liczb parzystych i $m-1$ nieparzystych. Zatem

$$|A\cap B| = m\cdot(m-1).$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A\mid B) = \frac{|A\cap B|}{|B|} = \frac{3m(m-1)}{m(m-1)(2m-1)} = \frac{3}{2m-1} = \frac{3}{n-1}.$$

Zbierzmy razem odpowiedzi w rozważanych czterech przypadkach:

- jeśli n jest liczbą nieparzystą i k jest liczbą parzystą, to
$$P(A\mid B) = \frac{3(n^2-4n+7)}{(n-1)(n^2-2n+3)},$$
- jeśli n jest liczbą nieparzystą i k jest liczbą nieparzystą, to $P(A\mid B) = \dfrac{3(n-1)}{n^2-2n+3}$,
- jeśli n jest liczbą parzystą i k jest liczbą parzystą, to $P(A\mid B) = \dfrac{3(n-2)}{n(n-1)}$,
- jeśli n jest liczbą parzystą i k jest liczbą nieparzystą, to $P(A\mid B) = \dfrac{3}{n-1}$.